BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№2 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2008

MEXANİKA

ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ О ВОЛНОВОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В УПРУГОЙ ТРУБКЕ СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИИ

М.Г.ГАСЫМОВ, Р.Ю.АМЕНЗАДЕ

Бакинский Государственный Университет

В данной статье, на основе линейных усредненных уравнений, даются решения задач гидроупругости, связанных с пульсирующим течением идеальной несжимаемой жидкости, заключенной в линейно-упругую трубку конечной длины с учетом эффекта её сужения, а также в полубесконечной, когда её конечная часть обладает переменным круговым сечением, а полубесконечная – постоянным. Математически задачи сводятся к решению регулярной краевой задачи Штурма-Лиувилля.

Проблема исследования волн в деформируемых оболочках с протекающей в их полости жидкостью представляется весьма актуальной. Это обусловлено широким распространением в технике и живых организмах систем транспортировки жидкости. Такое рассмотрение представляет интерес в теоретическом и прикладном аспектах. Подобного рода задачи достаточно подробно изучены в работах [1, 2, 3]. За время, прошедшее с момента их опубликования появились новые мысли, новый взгляд на эту же тему. Однако в целом подход к этой важной и интересной проблематике сохранился тот же. Таким образом, здесь мы будем исходить из идей, изложенных во всех предыдущих работах.

1.*Трубка конечной длины.* Как и в большинстве разделов прикладной математики, прежде, чем учесть различные характерные свойства реальной системы, необходимо проанализировать простую модель. Поэтому здесь рассмотрим распространение гармонической волны в прямоосной линейно-упругой трубке длиной l, с протекающей в ней жидкостью.

Принимается, что площадь поперечного сечения трубки S зависит от продольной координаты x и она жестко прикреплена к окружающей среде, в следствие чего смещение в осевом направлении отсутствует. Жидкость считается невязкой, однородной и несжимаемой с плотностью ρ. Предполагается, что её течение может быть представлено посредством осевой составляющей скорости $u(x,t)$, где t - время. В такой одномерной постановке считается, что давление есть $p = p(x,t)$, а радиальное смещение стенки трубки $w = w(x,t)$. Тогда для принятой модели «трубка-жидкость», выпишем замкнутую систему уравнений гидроупругости, которая включает в себя уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial x}(Su) + L\frac{\partial w}{\partial t} = 0\,, \qquad (1.1)$$

уравнение импульсов

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial t}=0 \qquad (1.2)$$

и уравнение состояния материала трубки. Оно, при пренебрежении инерцией, имеет вид:

$$p=\frac{h}{R^2(x)}Ew\,. \qquad (1.3)$$

В приведенных выше уравнениях E - модуль упругости, h - толщина трубки, $R=R(x)$ - её радиус, $S(x)=\pi R^2(x)$, а $L(x)=2\pi R(x)$ - периметр поперечного сечения.

Далее не умаляя общности, функцию $R(x)$ запишем как $R(x)=R_0 g(x)$, где $g(x)$ - безразмерная положительная, дважды дифференцируемая монотонно убывающая функция $\forall x\in[0,l]$, причем $g(0)=1$. Теперь уравнения (1.1) и (1.3) можно переписать следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial x}+2\frac{g'(x)}{g(x)}u+\frac{2}{R_0 g(x)}\frac{\partial w}{\partial t}=0\,, \qquad (1.4)$$

$$w=p\frac{R_0^2 g^2(x)}{Eh}\,. \qquad (1.5)$$

Штрихи здесь и далее обозначают дифференцирование по x. Из уравнений (1.2), (1.4) и (1.5) можно исключить функции u и w. В итоге получаем уравнение относительно p

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+2\frac{g'(x)}{g(x)}\frac{\partial p}{\partial x}-\frac{1}{c_0^{\,2}}g(x)\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0\,, \qquad (1.6)$$

в котором опорная скорость c_0 определяется равенством

$$c_0=\sqrt{\frac{Eh}{2\rho R_0}}\,.$$

Сведем уравнение (1.6) к решению обыкновенного дифференциального уравнения. Для этого функцию $p(x,t)$ запишем в форме

$$p=p_*(x)\exp(i\omega t)\,. \qquad (1.7)$$

Здесь ω - задаваемое значение круговой частоты, а p_* - амплитуда возмущения, которая является, вообще говоря, комплексной функцией координаты положения. При подстановке решения вида (1.7) в (1.6) будем иметь:

$$p_*''+2\frac{g'(x)}{g(x)}p_*'+\frac{\omega^2}{c_0^{\,2}}g(x)p_*=0\,.$$

Отсюда, используя замену Лиувилля

$$y(x)=p_*(x)\exp\frac{1}{2}\int 2\frac{g'(x)}{g(x)}dx=p_*(x)g(x) \qquad (1.8)$$

получим приведенную форму волнового уравнения

$$y''+I(x)y=0\,. \qquad (1.9)$$

Здесь инвариант $I(x)$ определяется следующим образом

$$I(x)=\frac{\omega^2}{c_0^2}g(x)-\left\{\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}^2-\left\{\frac{g'(x)}{g(x)}\right\}'.$$

Введя, для краткости записи, следующие обозначения

$$\delta^2=\frac{\omega^2}{c_0^2},\ q(x)=\delta^2\{1-g(x)\}+\frac{g''(x)}{g(x)},$$

где δ - волновое число, после ряда элементарных преобразований, получим:

$$I(x)=\delta^2-q(x).$$

В результате уравнение (1.9) запишется как

$$y''+\delta^2y=q(x)y\,. \qquad (1.10)$$

В дальнейших рассуждениях будем использовать тот факт, что потенциал $q(x)$ удовлетворяет условию интегрируемости на отрезке $[0,l]$, т.е.

$$\int_0^l |\,q(x)|\,dx<+\infty\,. \qquad (1.11)$$

Что касается скорости распространения волны

$$c=\frac{\omega}{\sqrt{|\,I(x)|}} \qquad (1.12)$$

то она зависит от координаты x и, таким образом, является локальной волновой характеристикой.

Для последующего описания давления, скорости жидкости и перемещения стенки трубки, требуется, чтобы уравнение (1.10) удовлетворяло граничным условиям. Если принять, что при $x=0$ давление изменяется по закону

$$p(0,t)=\eta_0\exp(i\omega t),$$

а при $x=l$ равно

$$p(l,t)=\eta_l\exp(i\omega t),$$

где η_0 и η_l – задаваемые эмпирические величины, то, используя равенства (1.7) и (1.8), для искомой функции y сразу можно записать

$$y_0=\eta_0g(0)=\eta_0\ \left(g(0)=1\right),\ y_l=\eta_lg(l). \qquad (1.13)$$

Таким образом, решение поставленной задачи удалось свести к решению регулярной краевой задачи типа Штурма-Лиувилля

$$y''+\delta^2y=q(x)y \qquad (1.14)$$

$$y_0 = \eta_0, \; y_l = \eta_l g(l) \tag{1.15}$$

при условии (1.11).

Рассматривая (1.14) как неоднородное уравнение с известной правой частью и применяя метод вариации произвольных постоянных, решение уравнения (1.14) можно свести к эквивалентному интегральному уравнению

$$y(x,\delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_1^{\vee} e^{-i\delta x} + \frac{1}{\delta}\int_x^l \sin\delta(\xi - x) q(\xi) y(\xi,\delta)\, d\xi, \tag{1.16}$$

где α_1 и $\alpha_1^{\vee}$ постоянные интегрирования, которые подлежат определению исходя из граничных условий (1.15). Уравнение (1.16) является интегральным уравнением типа Вольтера и его можно решать методом последовательных приближений. Положим

$$y_0(x,\delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_1^{\vee} e^{-i\delta x}$$

и пусть для $n \ge 1$

$$y_n(x,\delta) = y_0(x,\delta) + \frac{1}{\delta}\int_x^l \sin\delta(\xi - x) q(\xi) y_{n-1}(\xi,\delta)\, d\xi.$$

В силу неравенства (1.11) по признаку Вейерштрасса из равномерной сходимости последовательных приближений следует, что единственное решение интегрального уравнения (1.16), которое обозначим через $y(x,\delta)$, определяется посредством ряда

$$y(x,\delta) = y_0(x,\delta) + \sum_{n=1}^{\infty}\{y_n(x,\delta) - y_{n-1}(x,\delta)\}. \tag{1.17}$$

Приведем другое представление ряда (1.17). Обозначив

$$y_n(x,\delta) - y_{n-1}(x,\delta) = \frac{1}{\delta^n} f_n(x,\delta)$$

запишем

$$y(x,\delta) = \alpha_1 e^{i\delta x} + \alpha_2 e^{-i\delta x} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta^n} f_n(x,\delta) \tag{1.18}$$

В разложении (1.18) имеем совокупность следующих рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} f_1(x,\delta) &= \int_x^l \sin\delta(\xi - x) q(\xi) y_0(x,\delta)\, d\xi, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_n(x,\delta) &= \int_x^l \sin\delta(\xi - x) q(\xi) f_{n-1}(x,\delta)\, d\xi. \end{aligned} \tag{1.19}$$

Итак, основываясь на вышеизложенном, можно утверждать, что все решения уравнения (1.14) при любых α_1 и $\alpha_1^{\vee}$ удовлетворяют уравнению (1.16).

Непосредственной проверкой можно показать обратное, а именно, что любое решение (1.16), имеющее производную второго порядка, при произвольных α_1 и $\alpha_1^{\vee}$, удовлетворяет также уравнению (1.14). Необходимо отметить, что из структуры ряда в (1.18) следует, что ряды, получаемые его почленным дифференцированием, также сходятся равномерно.

Таким образом, ряд (1.18) в сочетании с соотношениями (1.19) дает конструктивное представление искомого решения.

Теперь, если вернуться к формулам (1.7) и (1.8), то из них, согласно (1.18), следует:

$$p(x,t)=\frac{1}{g(x)}\left\{\alpha_1 e^{i\delta x}+\alpha_1^{\vee}e^{-i\delta x}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta^n}f_n(x,\delta)\right\}\exp(i\omega t)\,. \qquad (1.20)$$

Теперь мы готовы к определению постоянных α_1 и $\alpha_1^{\vee}$. Исходя из граничных условий (1.15), относительно них получим следующую систему алгебраических уравнений.

$$\alpha_1+\alpha_1^{\vee}=a$$
$$\alpha_1 e^{i\delta l}+\alpha_1^{\vee}e^{-i\delta l}=b\,,$$

из которой

$$\alpha_1=\frac{a\,e^{-i\delta l}-b}{e^{-i\delta l}-e^{i\delta l}}\,,\quad \alpha_1^{\vee}=\frac{b}{e^{-i\delta l}-e^{i\delta l}}\,.$$

Здесь введены обозначения

$$a=\eta_0-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta^n}f_n(0,\delta),\; b=g(l)\eta_l-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta^n}f_n(l,\delta).$$

Далее, используя формулу Эйлера, после элементарных выкладок, непосредственно из (1.20), получим:

$$p(x,t)=\frac{1}{g(x)}\left\{\frac{a\sin\delta(l-x)+b\sin\delta x}{\sin\delta l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta^n}f_n(x,\delta)\right\}. \qquad (1.21)$$

Отсюда, следуя равенству (1.21) и используя формулу (1.5), найдем перемещение w

$$w(x,t)=\frac{R_0^2}{hE}g(x)\left\{\frac{a\sin\delta(l-x)+b\sin\delta x}{\sin\delta l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta^n}f_n(x,\delta)\right\}. \qquad (1.22)$$

Для получения соотношения, определяющего скорость потока $u(x,t)$ проведем следующие рассуждения. Примем

$$u(x,t)=U(x)\exp(i\omega t)$$

и через $F(x)$ обозначим функцию

$$F(x)=\frac{1}{g(x)}\left\{\frac{a\sin\delta(l-x)+b\sin\delta x}{\sin\delta l}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta^n}f_n(x,\delta)\right\}.$$

Тогда из уравнения (1.2) можно получить выражение для распределения скорости. Оно имеет вид

$$u(x,t)=\frac{i}{\rho\omega}F'(x)\exp(i\omega t). \qquad (1.23)$$

Заметим, что нас, как физические величины, интересуют только действительные части полученных решений (1.21)-(1.23).

Для оценки вклада, возникающего при учете эффекта сужения, приведем результаты вычислений для скорости волны, исходя из полученной зависимости (1.12).

Для этого конкретизируем вид функции $g(x)$ и запишем её следующим образом [1]

$$g(x)=e^{-\beta x},$$

где $\beta>0$ размерный параметр, характеризующий степень сужения.

Очевидно, что она удовлетворяет сформулированным выше условиям и описывает конусообразное сужение трубки. Тогда для скорости c получим

$$c=\frac{\omega}{\sqrt{\delta^2-\delta^2\left(1-e^{-\beta x}\right)+\beta^2}}.$$

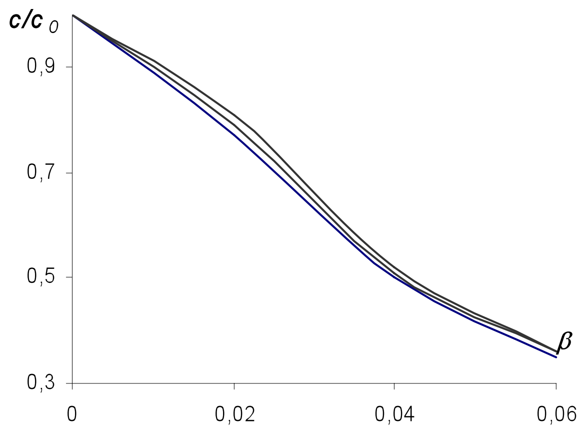

Рис.1. Зависимость безразмерной скорости волны от β

На рисунке 1. представлены графики зависимостей c/c_0 от x и β при следующих выбранных параметрах:

$$E=4\cdot10^6\,\frac{дн}{см^2},\ h=0{,}2см,\ \rho=1\frac{г}{см^3},\ R_0=2см,\ \omega=10\frac{1}{сек}.$$

Верхняя кривая соответствует значению $x=15см$, средняя $x=10см$, а нижняя $x=5см$. Из них следует, что при заданных значениях численных величин, при фиксированных x с возрастанием β скорость волны существенно уменьшается, в то время как при одном и том же β наблюдается весьма незначительное возрастание c/c_0 по мере удаления от торца. Причем с увеличением β скорости волн практически совпадают (при $\beta = 0{,}06$ $c/c_0 \approx 0{,}36$).

2. Полубесконечная трубка. Рассмотрим теперь задачу для случая полубесконечной трубки, когда её конечная часть имеет переменное круговое сечение, а полубесконечная – постоянное поперечное сечение (рис.2).

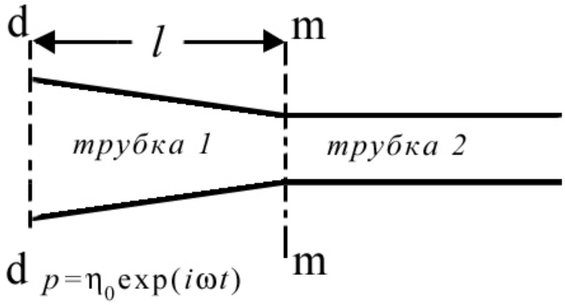

Рис.2. Рассматриваемая система.

При этом полагается, что их соединение идеально согласовано. Радиусы трубок 1 и 2 равны $R_1(x)=R_0 g(x)$ и $R_2 = R_0 g(l)$, соответственно. Давление в начальном сечении $d-d$ считается заданным. Материалы стенок трубок обладают различными модулями упругости. Условимся всем величинам, относящимся к трубке 1 приписывать индекс 1, а ко второй – индекс 2. Далее требуется определить распределение давления, скорости и перемещения в этой системе. С этой целью вновь рассмотрим равенство (1.20) и перепишем его следующим образом

$$p_1(x,t)=\left\{\frac{\alpha_1 e^{i\delta_1 x}+\overset{\vee}{\alpha}_1 e^{-i\delta_1 x}}{g(x)}+\varphi(x)\right\}\exp(i\omega t),\ 0\le x<l \qquad (2.1)$$

полагая здесь

$$\varphi(x)=\frac{1}{g(x)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\delta_1^n}f_n(x,\delta).$$

Уравнение (1.2) с учетом (2.1) позволяет определить функцию $u_1(x,t)$

$$u_1(x,t)=\frac{i}{\rho\omega}\left\{\frac{\alpha_1 k_1(x)-\overset{\vee}{\alpha}_1 \overset{\vee}{k}_2(x)}{g^2(x)}+\varphi'(x)\right\}\exp(i\omega t),\ 0\le x<l\,. \qquad (2.2)$$

Для трубки 2, принимая во внимание только волну, бегущую в положительном направлении оси x, следуя [4] можно сразу записать

$$p_2(x,t)=\alpha_2 e^{-i\delta_2 x}\exp(i\omega t)$$

$$x > l \qquad (2.3)$$

$$u_2(x,t) = \alpha_2 \frac{\delta_2}{\rho\omega} e^{-i\delta_2 x} \exp(i\omega t)$$

В приведенных формулах (2.1) – (2.3) введены обозначения

$$k_1(x) = e^{i\delta_1 x}\{i\delta_1 g(x) - g'(x)\},\ k_1^{\vee}(x) = e^{-i\delta_1 x}\{i\delta_1 g(x) + g'(x)\}$$

при

$$\delta_1 = \frac{\omega}{c_{01}},\ \delta_2 = \frac{\omega}{c_{02}},$$

а

$$c_{01} = \sqrt{\frac{E_1 h}{2\rho R_0}},\ c_{02} = \sqrt{\frac{E_2 h}{2\rho R_2}}.$$

Отметим, что равенства (2.3) вытекают непосредственно из того же факта, что для конкретно рассматриваемого фурье-элемента все давления и скорости должны колебаться с одной и той же частотой ω.

Очевидно, что последующие рассуждения и выкладки связаны с вычислением трех постоянных интегрирования α_1, $\alpha_1^{\vee}$ и α_2. Для их определения на торце трубки $x = 0$ (сечение $d - d$) зададим давление

$$p_1(0,t) = \eta_0 \exp(i\omega t).$$

В сечении $m - m$ $(x = l)$ должны выполняться условия непрерывности расхода жидкости, чтобы удовлетворялся закон сохранения массы и давления. В исследуемой трактовке это означает, что

$$u_1(l,t) = u_2(l,t),$$
$$p_1(l,t) = p_2(l,t).$$

Отсюда вычисление констант интегрирования приводит к решению системы неоднородных алгебраических уравнений, которую можно представить в компактной форме, если ввести следующие переобозначения $z_1 = \alpha_1$, $z_2 = \alpha_1^{\vee}$, $z_3 = \alpha_2$:

$$a_{mj} z_j = b_m. \qquad (2.4)$$

Здесь m принимает значения 1, 2 и 3, по повторяющемуся индексу j подразумевается суммирование от 1 до 3, а элементы a_{mj} и свободные члены b_m определяются следующими равенствами:

$$a_{11} = e^{i\delta_1 l},\ a_{12} = e^{-i\delta_1 l},\ a_{13} = -g(l)e^{-i\delta_2 l},\ b_1 = -g(l)\varphi(l);$$
$$a_{21} = k_1(l),\ a_{22} = -k_1^{\vee}(l),\ a_{23} = -i\delta_2 g^2(l)e^{-i\delta_2 l}\ \ b_2 = -g^2(l)\varphi'(l);$$
$$a_{31} = 1,\ a_{32} = 1,\ a_{33} = 0,\ b_3 = \eta_0 - \varphi(0).$$

Решая систему (2.4), по правилу Крамера, находим:

$$z_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}. \qquad (2.5)$$

Здесь Δ_j - определитель, получающийся из Δ заменой столбца, составленного из коэффициентов a_{mj} при неизвестном z_j, столбцом, составленным из свободных членов b_m. Полученными формулами (2.5) наша задача может считаться решенной.

В заключение отметим, что применяя аналогичные методы можно решать и более сложные задачи, учитывающие реологические свойства стенок трубки и жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. М.: Мир, 1983. С. 400.
2. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи гидроупругости М.: Наука, 1979. С. 320.
3. Аменздаде Р.Ю., Киясбейли Э.Т. Волны в упругой трубке переменного сечения с протекающей жидкостью. Труды III Всероссийской конференции по теории упругости с международным участием 13 – 16 октября, 2004, с. 40-43.
4. Лайтфут Э. Явления переноса в живых системах. М.: Мир, 1977, 520 с.

ELASTİK BORUDA MAYENİN DALĞAVARI AXININI MƏSƏLƏSİNİN DƏQİQ HƏLLİ

M.Q.QASIMOV, R.Y.ƏMƏNZADƏ

XÜLASƏ

İşdə xətti ortalaşdırılmış tənliklər əsasında hidrodinamika məsələsinin həlli verilir. Məsələ sonlu uzunluqlu xətti elastiki boruda sıxılmayan ideal mayenin pulsvarı hərəkəti ilə bağlıdır. Borunun daralması nəzərə alınır. Yarımsonsuz boru halında sonlu üçün en kəsiyi dəyişən dairəvi, sonsuz üçün en kəsiyi sabit götürülür.

EXTRACT SOLUTION OF THE EQUATION OF WAVE LIQUID STREAM IN THE ELASTIC PIPE WITH GEOMETRY

M.G.GASYMOV, R.YU.AMENZADEH

SUMMARY

In the work the solution of the hidroelasticity problem on the base of average linear equations, relating with impulsive stream of the ideal non-compressable liquid in the linear elastic finite lenth pipe, considering pressable effect and also half infinite lenth pipe when its end has variable circle profile and the profile at the infinity is constant.